ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN ĐÔNG

CÁC ĐƯỜNG THẲNG BẬC *n* CỦA TAM GIÁC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. Nguyễn Việt Hải

THÁI NGUYÊN - 2020

Danh mục các hình

1.1 Các tính chất 1.1.1, 1.1.2 của đường thẳng đẳng giác . . . 7
1.2 Định lý Steiner . . . 9
1.3 A_2, B_2, C_2 thẳng hàng . . . 10
1.4 Các đường thẳng đẳng giác đồng quy . . . 11
1.5 AH là đường thẳng đối trung xuất phát từ A . . . 14
1.6 Quỹ tích đường đối trung . . . 16
1.7 Tứ giác điều hòa và đường đối trung . . . 17
1.8 Hai đường đối song . . . 19
1.9 Đường đối trung chia đôi cạnh đối song . . . 20
1.10 Đường đối trung ngoài . . . 21
1.11 Ba đường đối phân giác $AA_2,\ BB_2,\ CC_2$ . . . 23
1.12 Quỹ tích các điểm K mà $KN : KM = c^{-2} : b^{-2}$ . . . 24
1.13 Khoảng cách từ tâm đối phân giác đến các cạnh . . . 25
1.14 $DL = HE = FK = abc : (bc + ca + ab)$ . . . 26

2.1 Một số cát tuyến đặc biệt . . . 27
2.2 $\sin\alpha : \sin\beta = c^{n-1} : b^{n-1}$ . . . 28
2.3 Quỹ tích các điểm M mà MM_2: $MM_1 = c^{n-1} : b^{n-1}$ . . . 29
2.4 $MF : PN : KD = a^{n+1} : b^{n+1} : c^{n+1}$ . . . 32
2.5 Chuyển từ bậc n sang bậc $n + 2$ . . . 35
2.6 Chuyển từ bậc n sang bậc $n + 1$ . . . 36
2.7 Chia đoạn thẳng BC bởi D . . . 37
2.8 Chuyển từ bậc n sang bậc $n + m$ . . . 40
2.9 $A_1B_1C_1$ là tam giác hình chiếu của M . . . 41

3.1 AD là đường đối trung của $\triangle ABC$ . . . 45
3.2 P thuộc đường thẳng cố định AM . . . 46
3.3 AF đi qua trung điểm của HK . . . 47
3.4 Ba đường thẳng AH, BN, CM đồng quy . . . 49
3.5 $\triangle HIP$ và $\triangle IKQ$ là các tam giác cân . . . 50
3.6 Chứng minh đẳng thức (3.5) . . . 52
3.7 Vẽ đường thẳng "một nửa" . . . 53
3.8 VN-TST 2001, bài 2 . . . 55
3.9 Thi chọn đội tuyển PTNK, 2010, TP. Hồ Chí Minh . . . 56
3.10 IMO shortlist 2003, bài 2 . . . 57
3.11 USA-TST-2007, bài 5 . . . 58
3.12 Thi toàn Liên bang Nga, 2010, bài 5 . . . 60

3.13 RGO in honour of I.F.Sharygin 2013 61
3.14 RGO in honour of I.F.Sharygin 2013, Final round 62

Mục lục

Chương 1. Một số cát tuyến đặc biệt của tam giác **6**
1.1. Các đường thẳng đẳng giác và đẳng cự 6
1.2. Các đường đối trung 13
1.2.1. Các đường đối trung của tam giác 13
1.2.2. Đường đối trung và đường đối song 18
1.2.3. Độ dài đường đối trung và đường đối trung ngoài 20
1.3. Các đường đối phân giác 22

Chương 2. Đường thẳng bậc n **27**
2.1. Định nghĩa và các tính chất 27
2.2. Chuyển đường thẳng n sang đường thẳng $n+m$ 34
2.3. Tam giác hình chiếu và các đường thẳng bậc n 41

Chương 3. Một số ứng dụng **44**
3.1. Ứng dụng giải các bài toán hình học 44
3.2. Ứng dụng giải các bài toán thi học sinh giỏi, thi Olympic 54

Tài liệu tham khảo **65**

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11B trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Trung tâm Nghiên cứu Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng đã giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K11B đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2020

Tác giả

Trần Văn Đông

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Các đường thẳng như trung tuyến, phân giác, đường đối trung... của tam giác đóng vai trò quan trọng trong hình học tam giác. Đó cũng chính là các trường hợp đặc biệt của đường thẳng bậc n của tam giác. Ngoài các đường thẳng bậc n đặc biệt đã biết còn có những đường thẳng nào khác? Các đường thẳng bậc n có những tính chất đặc trưng gì? Cách dựng chúng như thế nào? Có thể áp dụng chúng để giải các bài toán như thế nào?... Đó là lý do mà chúng tôi chọn đề tài **"Các đường thẳng bậc n của tam giác"**. Mục đích của đề tài là:

- Trình bày khái niệm về các đường thẳng đặc biệt đi qua các đỉnh của tam giác: Trung tuyến, đường đối trung, đường phân giác, đường đối phân giác... Các đường thẳng này đều có tính chất đặc trưng và liên quan đến các điểm đặc biệt trong tam giác. Tài liệu tham khảo chính ở đây là [2].
- Tổng quát hóa của các đường thẳng đặc biệt nói trên là các đường thẳng bậc n của tam giác. Từ các tính chất của đường thẳng bậc n có thể đưa ra cách dựng đường thẳng bậc n với n là số tùy ý. Các ứng dụng của đường thẳng bậc n rất phong phú, xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi, thi Olympic trong nước và quốc tế.
- Bồi dưỡng học sinh giỏi phổ thông có năng khiếu Toán, nâng cao và khai thác các chuyên đề hình học hay và khó, chưa được giới thiệu trong chương trình Hình học phổ thông, kể cả trong các giáo trình Hình học sơ cấp.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Dựa vào các tài liệu chính [1], [2] và [6], luận văn nhắc lại và bổ sung các định nghĩa, tính chất của các cát tuyến đặc biệt trong tam giác. Từ đó tổng quát hóa thành các đường thẳng bậc n của tam giác. Các bài toán dành cho học sinh giỏi được trình bày dưới dạng các ví dụ áp dụng của nội dung đề tài. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

Chương 1. Một số cát tuyến đặc biệt của tam giác

Trình bày một số đường thẳng đi qua đỉnh tam giác có những tính chất đặc biệt: đường thẳng đẳng giác, đường thẳng đẳng cự, đường thẳng đối trung cùng các tính chất đặc trưng của chúng. Mối liên hệ giữa các cát tuyến này và các đường thẳng quen thuộc được thể hiện qua các định nghĩa và các mệnh đề. Chương này bao gồm 3 mục sau (có tham khảo và chọn lọc trong [2], [6]):

1.1. Các đường thẳng đẳng giác và đẳng cự

1.2. Đường đối trung

1.3. Các đường đối phân giác

Chương 2. Các đường thẳng bậc n

Chương này là nội dung trọng tâm của luận văn. Các đường thẳng bậc n được tổng quát hóa từ các đường thẳng đã có: trung tuyến, đường đối trung, đường đối phân giác,... Ở đây cũng giới thiệu những đặc trưng chung của đường thẳng bậc n trong tam giác. Từ các tính chất đó lại đưa ra được cách dựng các đường thẳng bậc n và cách chuyển từ đường thẳng bậc n sang đường thẳng bậc $n+1, \ldots$

Chương này có tham khảo, chọn lọc trong các tài liệu ([1], [3]) và bổ sung các ví dụ tường minh. Nội dung bao gồm

2.1. Định nghĩa và các tính chất

2.2. Chuyển đường thẳng bậc n thành đường thẳng bậc $n + m$

2.3. Tam giác hình chiếu và các đường thẳng bậc n

Chương 3. Một số ứng dụng

Có thể tách thành hai nội dung nhỏ: ứng dụng vào các bài toán hình học phổ thông và đề cập tới các bài toán thi học sinh giỏi, thi Olympic trong nước và ngoài nước. Khi trình bày cách giải tác giả cố gắng làm rõ tính ưu việt của lời giải có ứng dụng các đường thẳng bậc n của tam giác. Nội dung bao gồm (tham khảo trong [3], [4]):

3.1. Ứng dụng vào giải các bài toán phổ thông

3.2. Các bài toán thi học sinh giỏi và thi Olympic các nước

Chương 1

Một số cát tuyến đặc biệt của tam giác

Một đường thẳng cắt một hình gọi là *cát tuyến* của hình đó. Nếu hình là một đa giác thì cát tuyến có thể cắt không những các cạnh của hình mà còn cắt cả phần kéo dài của cạnh đó. Các trung tuyến, đường cao, đường phân giác trong,...là các ví dụ về cát tuyến trong tam giác. Chương này sẽ trình bày thêm một số cát tuyến đặc biệt khác đi qua đỉnh tam giác.

1.1. Các đường thẳng đẳng giác và đẳng cự

Định nghĩa 1.1. *Cho một góc $\widehat{xOy}$, hai đường thẳng đi qua đỉnh O tạo với phân giác góc đó những góc bằng nhau, gọi là các đường thẳng đẳng giác đối với các cạnh của góc.*

Các đường thẳng đẳng giác có các tính chất sau:

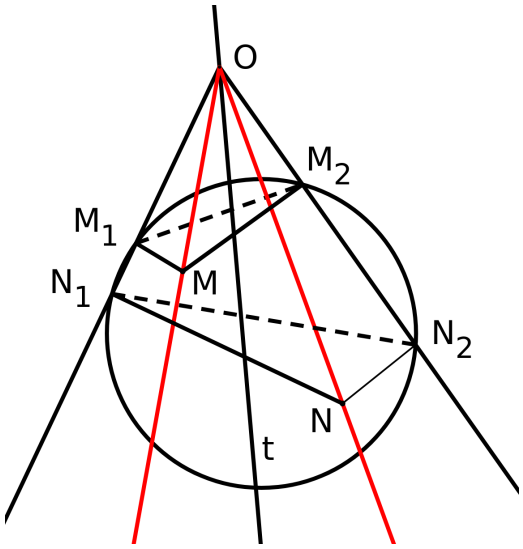
Tính chất 1.1.1. *Với hai điểm bất kỳ trên hai đường thẳng đẳng giác ta có tích khoảng cách từ hai điểm đó đến một cạnh góc bằng tích hai khoảng cách đến cạnh kia.*

Tính chất 1.1.2. *Hai điểm bất kỳ trên 2 đường thẳng đẳng giác chiếu lên 2 cạnh góc tạo thành bốn điểm đồng viên.*

Chứng minh. Trên Hình 1.1 ta phải chứng minh $MM_1.NN_1 = MM_2.N_2$. Từ sự đồng dạng của các tam giác vuông: $\triangle OM_1M \sim \triangle ON_2N$; $\triangle ON_2N \sim \triangle OM_2M$

ta có:

$$\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{OM}{ON} = \frac{MM_2}{NN_1};\ \frac{OM_1}{ON_2} = \frac{OM}{ON} = \frac{OM_2}{ON_1}.$$



Hình 1.1: Các tính chất 1.1.1, 1.1.2 của đường thẳng đẳng giác

Từ đó,

$$MM_1.NN_1 = MM_2.NN_2;\ OM_1.ON_1 = OM_2.ON_2 \tag{1.1}$$

Đẳng thức đầu trong (1.1) chứng minh Ttính chất 1.1.1; đẳng thức thứ hai cho Tính chất 1.1.2 do tính chất của phương tích.

Tâm đường tròn đi qua N_1, M_1, N_2, M_2 là giao điểm của 2 đường trung trực đoạn thẳng M_1, N_1, M_2, N_2. □

Tính chất 1.1.3. *Đường thẳng nối 2 hình chiếu trên các cạnh của góc của một trong hai điểm trên, vuông góc với đường nối đỉnh góc với điểm thứ hai.*

Chứng minh. Tứ giác OM_1MM_2 nội tiếp được, ta có $\widehat{M_1OM} = \widehat{M_2ON}$. Vì $\widehat{M_1OM} = \widehat{M_1M_2M}$ (các góc nội tiếp chắn cùng 1 cung trên đường tròn) nên $\widehat{M_1M_2M} = \widehat{M_2ON}$ và vì $M_2M \perp OM_2$ ta suy ra: $M_1M_2 \perp ON$. Tương tự, $N_1N_2 \perp OM$. □

Tính chất 1.1.4. *Mệnh đề đảo của Tính chất 1.1.1 cũng đúng.*